

$$\int_{-A}^A \frac{dr}{\lambda(r)} \times 2 = \int_{-A}^A \frac{dr}{\left(\frac{h}{\boxed{}} \right)} \times 2 = n$$

ここで積分を実行するため変数変換をする。 $\frac{r}{A} = \sin \theta$ と置くと、 $dr = A \cos(\theta) d\theta$ で $-A \leq r \leq A$ は $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_{-A}^A \frac{dr}{\lambda(r)} \times 2 = \frac{\boxed{}}{h} A^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = n$$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$ であるから、量子条件はつぎのように表される。

$$\frac{\boxed{}}{h} A^2 = n$$

$2\pi v = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を使って v を k, m で表し、 A^2 を n, h, m, k で表すと

$$A^2 = \frac{nh}{\boxed{}}$$

したがって振幅 A は自由な値が許されず、 $n=1,2,3,\dots$ によってとびとびの振幅の大きさだけが生じる。

次にエネルギー準位を考えると

エネルギーは保存されるので、変位最大 $r=A$ で速度が $v=0$ のところで計算すればいい。

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

したがってエネルギーを n, h, m, k で表すと

$$E_n = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}} nh$$

これを単振動の振動数 $\nu (= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}})$ 、量子数 n 、および h を用いて表すと

$$E_n = nh \boxed{} \text{ となる。}$$

したがってエネルギー準位は $n=1,2,3,\dots$ によって $h\nu$ の整数倍の値だけが生じる。

バネによる単振動を量子化すると、 $h\nu$ という量子の整数倍のエネルギーしか出てこないの、同じエネルギーを持った物質が 1 個、2 個、3 個・・・とある状況に似ていて、**オンと名付けて粒子のように扱う。

結晶の熱による原子の振動をフォノン、磁化の振動をマグノン、電磁場の振動を光子等等。

こうした物質中や真空中の様々な粒子の生成消滅は『場の量子論』と呼ばれている。